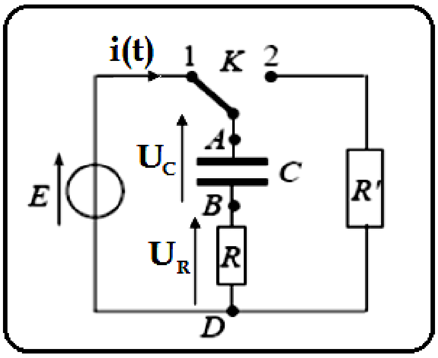
حلول تمارين ثنائي القطب RC

حل التمرين الأول:

1ـ جهة التيار و كذلك جهة الجهود $u_R ; u_C$:



2ـ أـ عبارة كل من $u_C ; u_R$ بدلالة $q = q_A$

نعلم أن :
$$\begin{cases} U_R(t) = R.i(t) = R.\dfrac{dq}{dt} \\ U_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} \end{cases}$$

ب – إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحققها $q(t)$

ـ باستعمال قانون جمع التوترات :

$$E = U_R + U_C$$

$$E = R.i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

بضرب طرفي المعادلة في سعة المكثفة C نجد :

$$C.E = C.R.i(t) + C.\frac{q(t)}{C}$$

$$C.E = \tau.\frac{dq}{dt} + q(t)$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau}q(t) = \frac{E}{R}}$$

ج ـ لنعبر عن A و α بدلالة $C;E;R$:

$$q = A\left(1 - e^{-\alpha.t}\right) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = A.\alpha.e^{-\alpha.t}$$

$$C.E = R.C.A.\alpha.e^{-\alpha.t} + A\left(1 - e^{-\alpha.t}\right) = A + A(RC\alpha - 1)e^{-\alpha.t}$$

إذن : $A = C.E = Q_0$

$$RC\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

إذن : $\boxed{q(t)=Q_0\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)}$

د- إستنتاج E :

$$U_C(t)=\frac{q(t)}{C}\Rightarrow U_C(t)=\frac{Q_0}{C}\left(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

$$U_C(t\to\infty)=\frac{\cancel{C}.E}{\cancel{C}}(1-0)=5V$$

$$\boxed{E=5V}$$

ه – إستنتاج سعة المكثفة :

$$E_C(t)=\frac{1}{2}.C.U_C^2(t)$$

$$E_C(t\to\infty)=\frac{1}{2}.C.E^2\Rightarrow C=\frac{2.E_C}{E^2}=\frac{2.5.10^{-3}}{5^2}=4.10^{-4}F$$

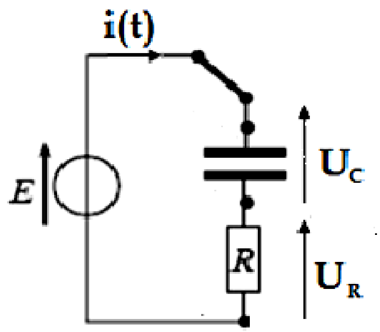
$$\boxed{C=4.10^{-4}F}$$

2- أ- تتفرغ المكثفة عبر : $R+R'$

ب- $\begin{cases}\tau_1=R.C\\ \tau_2=(R+R').C\end{cases}\Rightarrow \tau_2\succ\tau_1$

حل التمرين الثاني:

1- إيجاد المعادلة التفاضلية :



$$E=U_R+U_C$$

$$\begin{cases}U_R(t)=R.i(t)=R.\frac{dq}{dt}\\ q(t)=CU_C(t)\end{cases}$$

$$E=U_R+U_C=U_R+R.\frac{dq}{dt}=U_R+R.C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{R.C}U_R=\frac{E}{R.C}}.............(1)$$

2- لنتحقق أن المعادلة التفاضلية المحصل عليها تقبل العبارة $u_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$ كحل لها .

$$\frac{dU_C}{dt}=\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}........(2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد : $\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}+E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)=\frac{E}{R.C}$

3- وحدة $R.C$:

باستعمال طريقة التحليل البعدي :

$$[R.C]=[R].[C]=\frac{[\cancel{U}]}{[i]}.\frac{[q]}{[\cancel{U}]}=\frac{[q]}{[i]}=\frac{[\cancel{i}][t]}{[\cancel{i}]}=[t]$$
$$[R.C]=[t]=T\,(s)$$

إذن وحدة $R.C$ هي الزمن (s) .

ـ مدلوله العلمي :

لدينا : $u_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$

لما : $t=R.C\rightarrow U_C(R.C)=E\left(1-e^{\left(-\frac{R.C}{R.C}\right)}\right)=E\left(1-e^{(-1)}\right)=0,63E$

إذن عند $t=R.C$ تكون المكثفة قد شحنت بنسبة 63% .

4ـ إكمال الجدول 5ـ رسم البيان .

6ـ عبارة التيار :

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{d(C.U_C)}{dt}=C\frac{dU_C}{dt}$$
$$i(t)=\frac{\cancel{C}.E}{R.\cancel{C}}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}=\frac{E}{R}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}=I_0e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}$$
$$\boxed{i(t)=I_0e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}}$$

7ـ عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة :

$$E_C(t)=\frac{1}{2}.C.U_C^2(t)=\frac{1}{2}.C.E^2\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)^2$$
$$E_C(t\rightarrow\infty)=\frac{1}{2}.C.E^2=\frac{1}{2}1,2.10^{-6}.6^2=2,16.10^{-5}J$$

حل التمرين الثالث:

1ـ شدة التيار المار في الدارة :

باستعمال قانون جمع الجهود : $E=U_R+U_C$

عند $\Delta t=15s$ يكون : $E=U_C=5V$

إذن $E=U_C+Ri\Rightarrow i(15s)=0$

2ـ العبارة الحرفية لثابت الزمن τ :

$$\tau=R.C$$

τ له بعد زمني:

$$[\tau]=[R.C]=[R].[C]=\frac{[\cancel{U}]}{[i]}.\frac{[q]}{[\cancel{U}]}=\frac{[q]}{[i]}=\frac{[\cancel{i}][t]}{[\cancel{i}]}=[t]$$
$$[R.C]=[t]=T\,(s)$$

3ـ تعيين قيمة τ :

من البيان $U_C=f(t)$ نجد $\tau=2,5s$

$$\tau = R.C \Rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{2,5}{10^4} = 2,5.10^{-4}F$$

4ـ أ ـ عبارة $i(t)$ بدلالة $q(t)$: $i(t) = \frac{dq}{dt}$

ب ـ عبارة $U_C(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$q(t) = CU_C(t) \Rightarrow U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

ج – باستعمال قانون جمع الجهود :

$$E = U_R + U_C$$

$$\begin{cases} U_R(t) = R.i(t) \\ q(t) = CU_C(t) \end{cases}$$

$$E = U_R + U_C = U_R + R.\frac{dq}{dt} = U_R + R.C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R.C}U_R = \frac{E}{R.C}}$$

5ـ العبارة الحرفية لـ A:

$A = R.C$ مدلوله : ثابت زمني يميز الدارة (R,C)

حل التمرين الرابع:

1ـ أ ـ البادلة في الوضع (1) : تشحن المكثفة .

ب ـ يمكن عمليا مشاهدة بعدة طرق منها : إيصال قطبي المكثفة بجهاز راسم الإهتزاز المهبطي .

ج – كتابة المعادلة التفاضلية :

$$E = U_R + U_C$$

$$\begin{cases} U_R(t) = R.i(t) = \\ q(t) = CU_C(t) \end{cases}$$

$$E = U_R + U_C = U_R + R.\frac{dq}{dt} = U_R + R.C\frac{dU_C}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R.C}U_R = \frac{E}{R.C}} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

د ـ العبارة الحرفية لثابت الزمن τ : $\tau = R.C$

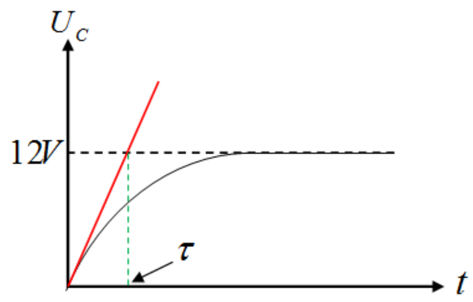
هـ ـ لنبين أن المعادلة التفاضلية السابقة تقبل العبارة $u_C = E\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{A}\right)}\right)$ حلا لها .

$$U_C = E\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}$$

$$\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)} + \frac{E}{R.C}\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right) = \frac{E}{R.C}$$

و – رسم كيفيا $U_C = f(t)$ وكيفية تحديد الثابت τ



كيفية تحديد الثابت τ:

هو فاصلة نقطة تقاطع المماس للبيان عند اللحظة $t = 0$ و المستقيم المقارب الأفقي ذي المعادلة $U_C = E$

ي – المقارنة بين قيمة التوتر u_{AB} في اللحظة $t = 5\tau$ و E:

$$U_C = U_{AB} = E\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)$$

$$U_{AB}(5\tau) = E\left(1 - e^{\left(-\frac{5\tau}{\tau}\right)}\right) \approx E$$

نتيجة : عند $t = 5\tau$ نمر من النظام الإنتقالي إلى النظام الدائم و يوافق الشحن الكلي للمكثفة أي $U_C = E$

2ـ أ عند وضع القاطعة في الوضع (2) تتفرغ المكثفة عبر الناقل الأومي .

ب – حساب الطاقة الأعظمية

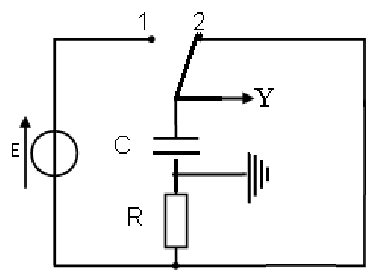
لدينا :

$$E_C(t) = \frac{1}{2}.C.U_C^2(t) = \frac{1}{2}.C.E^2\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)^2$$

$$E_C(t \to \infty) = \frac{1}{2}.C.E^2 = \frac{1}{2}.10^{-6}.12^2 = 7{,}2.10^{-5}J$$

حل التمرين الخامس:

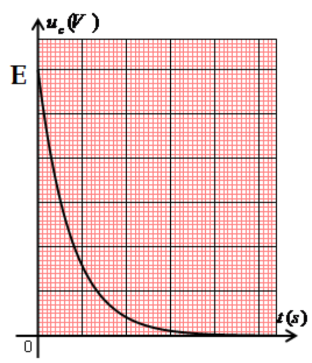
1ـ مخطط تفريغ المكثفة :



ـ البادلة في الوضع (1) : شحن

ـ البادلة في الوضع (2) : تفريغ

2ـ توصيل الدارة براسم الإهتزاز المهبطي (موضحة في الشكل).



3ـ المعادلة التفاضلية للتفريغ هي $\alpha\frac{du_C}{dt}+u_C=0.....(1)$

التحقق أن حلها من الشكل : $u_C(t)=E.e^{-\frac{t}{\alpha}}$

$$\frac{du_C}{dt}=\frac{-E}{\alpha}.e^{-\frac{t}{\alpha}}.....(2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد : $\cancel{\alpha}\frac{-E}{\cancel{\alpha}}.e^{-\frac{t}{\alpha}}+E.e^{-\frac{t}{\alpha}}=0$

تعيين α :

لدينا : $u_C(t)=E.e^{-\frac{t}{\alpha}}$

بادخال اللوغاريتم النبيري بين الطرفين نجد : $\ln(u_C(t))=\ln E-\frac{1}{\alpha}t....(3)$

البيان عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالمبدأ معادلته من الشكل : $\ln(u_C(t))=A+B.t....(4)$

بالمطابقة بين (3) و (4) نجد : $\begin{cases} A=\ln E \\ B=-\frac{1}{\alpha} \end{cases}$

B : يمثل معامل توجيه البيان .

$$B=\frac{0-1,5}{30.10^{-3}-0}=-50$$

$$-50=-\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{50}=0,02s$$

$$\boxed{\alpha=0,02s}$$

ـ قيمة ثابت الزمن τ هي : $\boxed{\tau=0,02s}$

$$\tau=R.C\Rightarrow C=\frac{\tau}{R}=\frac{0,02}{10000}=2\mu F$$

ـ قيمة E :

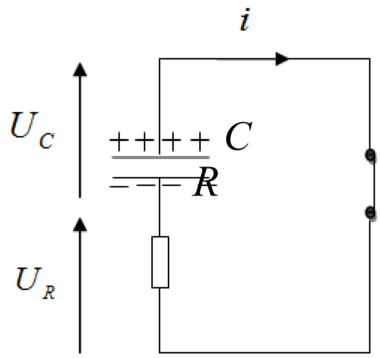
$$A=0,5.3=\ln(E)=1,5$$

$$E=e^{1,5}=4,48V$$

حل التمرين السادس:

1ـ مخطط الدارة الموصوفة :

2ـ



3ـ العلاقة بين U_C و U_R :

باستعمال قانون جمع الجهود : $U_R + U_C = 0$

4ـ المعادلة التفاضلية للدارة :

$$U_R(t) = R.i(t) = R.\frac{dq}{dt}$$

$$R.i(t) + U_C = 0 \Rightarrow R.C\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R.C}U_C = 0.......(1)$$

5ـ حل المعادلة هو : $u_C = ae^{b.t}$،

ايجاد كل من a و b

$$\frac{du_C}{dt} = abe^{b.t}......(2)$$

نعوض (2) في (1) فنجد :

$$R.C.abe^{b.t} + abe^{b.t} = 0$$

$$abe^{b.t}(R.C.b + 1) = 0$$

$$\begin{cases} abe^{b.t} \neq 0 \\ R.C.b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{R.C} \end{cases}$$

لما $t = 0$:

$$U_C(t=0) = a = 6V = E$$

$$\boxed{a = E = 6V}$$

$$b = -\frac{1}{R.C} = -\frac{1}{15.10^3.10^{-7}} = -666,66$$

6ـ إذن :

$$U_C(t) = E.e^{-\frac{t}{RC}}$$

7ـ

ـ لإيجاد ثابت الزمن τ نرسم مماس للبيان عند $t = 0$ نقطة تقاطع المماس مع محور الأزمنة يمثل τ حيث : $\tau = 0,015S$

ـ لإيجاد E :

لما $t = 0$:

$$U_C(t=0) = a.e^0 = a = 6V = E$$

حل التمرين السابع:

1ـ التعرف على البيانين :

نعلم أنه خلال الشحن يكون : $u_C(t)=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)$

عند $t=0$: $U_C(t=0)=0$

وكذلك :

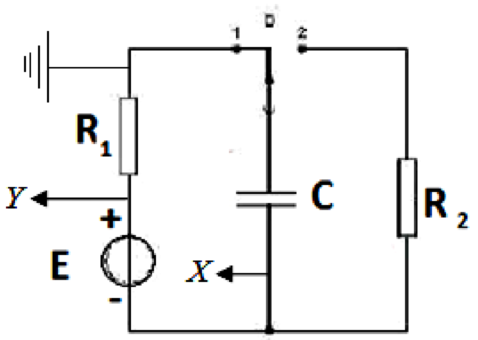
$$U_R(t)=R.i(t)\Rightarrow U_R(t)=R.I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$U_R(t=0)=R.I_0$$

إذن :

ـ بيان (1) : $U_C(t)$

ـ بيان (2) : $U_R(t)$

2ـ كيفية التوصيل للحصول على البيانين :



ملاحظة : خلال هذا التوصيل نحصل على بيان $U_C(t)$ أسفل محور الأزمنة (أنظر إلى الشكل المقابل – وضعية المدخل X)

3ـ المعادلة التفاضلية :

باستعمال قانون جمع التوترات :

$$E=U_R+U_C$$
$$\begin{cases}U_R(t)=R.i(t)=R.\dfrac{dq}{dt}\\ q(t)=CU_C(t)\end{cases}$$
$$E=U_R+U_C=U_R+R.\frac{dq}{dt}=U_R+R.C\frac{dU_C}{dt}$$
$$\boxed{\frac{dU_C}{dt}+\frac{1}{R.C}U_R=\frac{E}{R.C}}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

4ـ لنبين أن المعادلة التفاضلية السابقة تقبل العبارة $u_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)$ حلا لها .

$$U_C=E\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)$$
$$\frac{dU_C}{dt}=\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}$$
$$\frac{E}{RC}e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}+\frac{E}{R.C}\left(1-e^{\left(-\frac{t}{R.C}\right)}\right)=\frac{E}{R.C}$$

5ـ عبارة $i(t)$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=C.\frac{dU_C}{dt}=\frac{\cancel{C}.E}{R.\cancel{C}}.e^{-\frac{t}{\tau}}=I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

6ـ حساب كل من : $I_0;C;R_1$:

ـ من بيان $i(t)=f(t)$، لما $t=0$ ، $i(0)=I_0=0,24A$

من البيان (2) :

لدينا :

$$U_R(t)=R_1I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$t=0\Rightarrow$$
$$U_R(t=0)=R_1I_0=12V$$
$$R_1=\frac{12}{0,24}=50\Omega$$

ـ من بيان $i(t)=f(t)$: $\tau=10mS$

$$\tau=R_1.C\Rightarrow C=\frac{\tau}{R_1}=\frac{10.10^{-3}}{50}=2.10^{-4}F$$

حل التمرين الثامن:

I ـ شحن المكثفة

1ـ إيجاد من البيان قيمة سعة المكثفة c:

البيان $q=f(U_C)$ عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل : $q=K.U_C.......(1)$

نعلم أن : $q=C.U_C.......(2)$

بمطابقة العلاقتين (1) البيانية و (2) النظرية نجد : $K=C=\frac{\Delta q}{\Delta U_C}=\frac{10.10^{-3}-0}{0-10}=1mF$

2ـ القيمة المعطاة من طرف الصانع $C=1mF$ بدقة 20% :

بهذه الدقة تكون : $C\in[0,8mF-1,2mF]$

لدينا : $C=1mF$ القيمة المحسوبة سابقا من التجربة ، و هي تنتمي إلى المجال السابق و منه هذه القيمة تعتبر مقبولة بالدقة المعتبرة .

3ـ مقارنة الطاقة المخزنة من أجل :

أـ $I=0,33mA$

$$E_C=\frac{1}{2}C.U_C^{\,2}=\frac{1}{2}C\left(\frac{q}{C}\right)^2=\frac{1}{2C}I^2t^2$$
$$E_C=\frac{1}{2.10^{-3}}(0,33.10^{-3})^2(7,5)^2=3,06mJ$$

ب – من أجل : $I' = 0,165mA$

$$E_C = \frac{1}{2}C.U_C{}^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{q}{C}\right)^2 = \frac{1}{2C}I^2t^2$$

$$E_C = \frac{1}{2.10^{-3}}(0,165.10^{-3})^2(7,5)^2 = 0,76mJ$$

II. تفريغ المكثفة

1. الطاقة المخزنة في المكثفة خلال الشحن :

$$E_C = \frac{1}{2}C.U_0{}^2 = 1,05.10^{-2}J$$

2. المعادلة التفاضلية :

باستعمال قانون جمع الجهود :

$$U_C + 2.U_R = 0$$

$$U_C + 2.R.C.\frac{dU_C}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{2.R.C}U_C = 0}$$

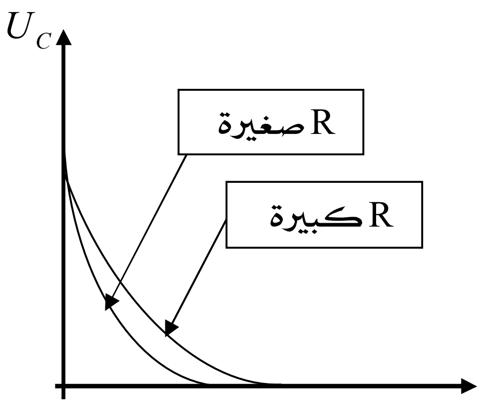
3. حل هذه المعادلة :

$U_C(t) = U_0.e^{-\frac{t}{2RC}}$ حيث $\tau = 2.R.C$

4. قيمة U_C عند $t = \tau$

$$U_C(\tau) = U_0.e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 0,37U_0$$

5. إذا أردنا تفريغ المكثفة بسرعة يجب إستخدام ناقل أومي مقاومته صغيرة .



حل التمرين التاسع:

1.أ)

$$u_R + u_C = E$$

المعادلة التفاضلية

$$du_C / dt + 1/RC\, u_C = E/RC$$

ب)

$$q(t) = C \times u_C = CE\,(1 - e^{-kt})$$

$$i(t) = dq/dt = (-k)\times -CE\, e^{-kt} = kCE\, e^{-kt}$$

$$\tau = RC = 1/k$$

$$i(t) = E/R\, e^{-t/(RC)}$$

جـ)

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-kt} = 0$$

$$i(t) \longrightarrow 0$$

.2

$$t = 5\tau$$

$$\tau = RC$$

$$t = 215\ ms$$

3. أ)

$$I_0 = q / \Delta t$$

$$q = I_0 \times \Delta t$$

$$q = 8{,}6 \times 10^{-6} \times 5 = 4{,}3 \times 10^{-5}\ C$$

ب)

$$u_C = q / C$$

$$u_C = 1\ V$$

$$E_{Cond} = ½ \times C\, u_C^2$$

$$E_{Cond} = 2{,}15 \times 10^{-5}\ J$$

جـ)

$$\Delta t = q / I_0$$

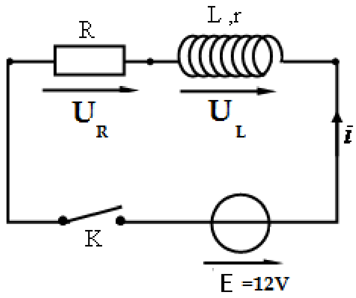
$$q = C \times u_C$$

$$\Delta t = C \times u_C / I_0$$

$$\Delta t = 200\ s$$

حل التمرين العاشر:

1 – تمثيل مخطط الدارة :



2ـ العبارة الحرفية لـ I في النظام الدائم :

في النظام الدائم تتصرف الوشيعة كناقل أومي : $E=(R+r).I$

من البيان $i=f(t)$ نجد : $I=0,06.4=0,24A$

حساب r :

$$E=(R+r).I \Rightarrow r=\frac{E-R.I}{I}=\frac{(12-35.0,24)}{0,24}=15\Omega$$

3ـ من البيان (1) :

$$\tau=20ms \text{ ، } \tau=\frac{L}{R+r}\Rightarrow L=\tau(R+r)=20.10^{-3}(35+15)=1H$$

4ـ أ ـ العبارة الحرفية لبيان الشكل (2)

البيان عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ معادلته : $L=K.\tau....(1)$

بحيث K معامل توجيه (ميل البيان) .

$$K=tg\alpha=\frac{4.0,2-0}{8.2.10^{-3}-0}=50H/s$$

بـ عبارة τ بدلالة : R,r,L

$$\tau=\frac{L}{R+r}\Rightarrow L=(R+r)\tau.......(2)$$

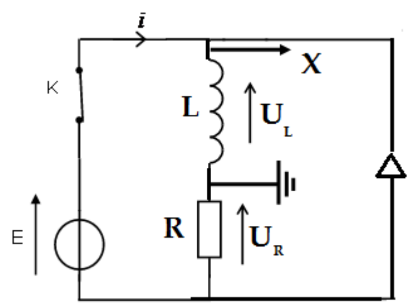
بمطابقة العلاقتين (1) التجريبية و (2) النظرية نجد : $K=R+r=50\Omega$

ج – نعم نتائج التجربة تتفق مع المعطيات .

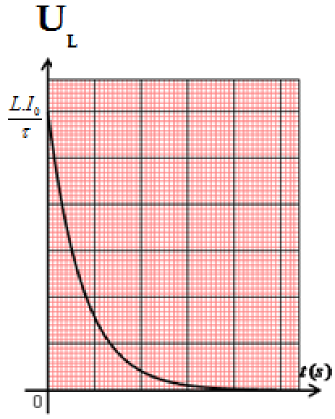
حل التمرين الحادي عشر:

-I

1ـ رسم مخطط للدارة موضحا جهة التيار و جهة التوتر بين طرفي كل من الوشيعة و الناقل الأومي .



2ـ توصيل الدارة براسم الإهتزاز المهبطي (موضح أعلاه) .



3ـ المعادلة التفاضلية للدارة هي : $A\frac{di}{dt}+i=0.....(1)$

التحقق أن حلها من الشكل : $i(t)=I_0.e^{-\frac{t}{A}}$

$$\frac{di(t)}{dt}=\frac{-I_0}{A}.e^{-\frac{t}{A}}.....(2)$$

إذن : $A.\frac{-I_0}{A}.e^{-\frac{t}{A}}+I_0.e^{-\frac{t}{A}}=0$

A : يمثل ثابت الزمن τ للدارة (R,L)

$$A=\tau=\frac{L}{R}$$

-II

1ـ العبارة البيانية :

$$\ln(i(t))=\alpha+\beta t........(3)$$

$$t=0\Rightarrow \ln(I_0)=\alpha+\beta.0=\alpha=0,2.3=0,6$$

β : ميل البيان .

$$\beta=-\frac{0,6}{3.10^4}-2.10^{-4}$$

2ـ حساب τ و L :

لدينا :

$$i(t)=I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln(i(t))=\ln\left(I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\ln I_0-\frac{t}{\tau}......(4)$$

بالمطابقة بين (3) و (4) نجد :

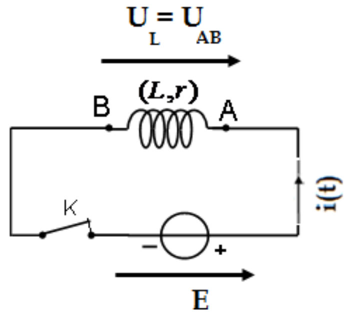
$$\begin{cases}\ln(I_0)=\alpha=0,6\Rightarrow I_0=e^{0,6}=1,81A\\ -\frac{1}{\tau}=\beta=-2.10^4\Rightarrow \tau=\frac{1}{2.10^4}=5.10^{-5}S\end{cases}$$

ـ حساب L : $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \tau.R = 10^{-3}H$

ـ حساب E : $E = R.I_0 = 20.1,81 \approx 36V$

حل التمرين الثاني عشر:

1ـ



2ـ إيجاد المعادلة التفاضلية :

باستعمال قانون جمع الجهود :

$$E = U_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$\boxed{\frac{E}{r} = \frac{L}{r}\frac{di}{dt} + i} ....(1)$$

ب ـ لنبين أن المعادلة التفاضلية السابقة تقبل حلا من الشكل : $i(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$

$\frac{i(t)}{dt} = \frac{I_0.r}{L}e^{-\frac{r}{L}t}$ ....(2) نعوض (2) في (1) فنجد : $\frac{\cancel{L}}{\cancel{r}}\frac{I_0.\cancel{r}}{\cancel{L}}e^{-\frac{r}{L}t} + I_0\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = I_0 = \frac{E}{r}$

3ـ تعطى عبارة $i(t)$:

$$i(t) = 0,45\left(1 - e^{-10t}\right).....(3)$$

3ـ أـ حساب I_0 :

لدينا : $i(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).....[4]$

بمطابقة (3) و (4) نجد : $\boxed{I_0 = 0,45A}$

3ـ ب المقاومة r :

في النظام الدائم : $E = r.I_0$

$$r = \frac{E}{I_0} = \frac{4,5}{0,45} = 10\Omega$$

3ـ ج ـ الذاتية L :

$$\frac{r}{L} = 10 \Rightarrow L = \frac{r}{10} = \frac{10}{10} = 1H$$

3ـ د – ثابت الزمن τ :

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{1}{10} = 0,1S$$

4ـ أـ قيمة الطاقة المخزنة في النظام الدائم :

$$E = \frac{1}{2}L.I_0 = \frac{1}{2}.1.(0,45)^2 = 0,101J$$

ب – عبارة التوتر اللحظي بين طرفي الوشيعة :

$$U_L = L\frac{di}{dt} + ri = \cancel{L}.\frac{I_0.r}{\cancel{L}}e^{-\frac{r}{L}t} + I_0\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right) = r.I_0 = E$$

$$U_L(t) = E$$

ج – قيمة التوتر عند $t = 0,3s$:

$$U_L(0,3s) = E = 4,5V$$

حل التمرين الثالث عشر:

1ـ الجهاز الذي يمكن من تعويض جهاز الكمبيوتر هو : جهاز راسم الإهتزاز المهبطي .

بـ عبارة U_{AB} بدلالة : $\frac{di}{dt}$ ، i : $U_{AB} = U_L = L\frac{di}{dt} + ri$

ج – عبارة $U_{BC}(t)$ بدلالة $i(t)$: $U_{BC}(t) = U_R(t) = R.i(t)$

د – المنحنى الموافق لكل توتر :

نعلم أن $i(t) = I_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

عند : $t = 0$ $i(0) = I_0\left(1-e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = 0$

$$U_{BC}(0) = U_R(t) = R.i(0) = R.0 = 0$$

إذن : ـ شكل (1) يمثل بيان $U_{BC}(t) = U_R(t)$

ـ شكل (2) يمثل بيان $U_{AB}(t) = U_L(t)$

2ـ أـ عبارة I_0 :

نعلم أنه في النظام الدائم الوشيعة تتصرف كناقل أومي .

باستعمال قانون جمع التوترات : $E = U_{AB} + U_{BC} = r.i + R.i = (R+r)I_0$

$$E = (R+r)I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{(R+r)} = \frac{6}{200+10} = 0,028A$$

ب – إيجاد قيمة I_0 بيانيا :

من البيان (1) :

$$U_{BC}(t) = U_R(t) = R.i(t) = R.I_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$t\to\infty \Rightarrow U_R(t\to\infty) = R.i(t\to\infty) = R.I_0\left(1-e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = 5,6V = R.I_0$$

$$I_0 = \frac{5,6}{200} = 0,028A$$

ج – ثابت الزمن τ : $\boxed{\tau = 2ms}$

د- عبارة ثابت الزمن : $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

بعد τ :

$L = \dfrac{u_L}{di/dt} \Rightarrow [L] = \dfrac{[u]}{[I]}[T]$:كما نعلم أن $\left[\dfrac{L}{R+r}\right] = \dfrac{[L]}{[R+r]}$

$R = \dfrac{u_R}{i} \Rightarrow [R] = \dfrac{[u_R]}{[I]} = \dfrac{[u]}{[I]}$:ولدينا أيضا

$\left[\dfrac{L}{R+r}\right] = \dfrac{[u][T][I]}{[I][u]}$ أي أن : $[T] = \dfrac{L}{R+r}$ ومنه وحدة المقدار $\dfrac{L}{R+r}$ هي الثانية.

ـ نصطلح على تسمية المقدار $\dfrac{L}{R+r}$ بثابت الزمن لثنائي القطب R L ، ونرمز له بالرمز τ.

هـ- قيمة الذاتية L:

$$\tau = \frac{L}{R+r} \Rightarrow L = \tau(R+r) = 2.10^{-3}(200+10) = 0,42H$$